

Sprawdzian predyspozycji do klas matematycznych

XIV LO im. S. Staszica w Warszawie

(30 maja 2016 r.)

Uwagi

- Poniższe zadania można rozwiązywać w dowolnej kolejności.
 - Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.
 - Podanie jedynie prawidłowej odpowiedzi liczbowej nie stanowi rozwiązania zadania. Ocenie podlegał będzie tok rozumowania oraz obliczenia prowadzące do uzyskanego wyniku.
-

1. Wykaż, że jeżeli $n > 1$ jest liczbą naturalną, to liczba

$$(n^6 - n^4 - n^2 + 1)(n^2 + 1)$$

jest kwadratem liczby naturalnej.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków BC i CD . Udowodnij, że suma pól trójkątów ABK i ADL jest większa od pola trójkąta AKL .

3. Czy każdy punkt okręgu o promieniu 1 można pokolorować na jeden z dwóch kolorów w taki sposób, aby każde dwa punkty tego okręgu odległe o 1 były różnych kolorów? Odpowiedź uzasadnij.

4. Dane są takie liczby całkowite a, b, c , że każda z liczb

$$ab + c, \quad bc + a, \quad ca + b$$

jest podzielna przez 3. Wykaż, że liczba $a^2 + b^2 + c^2$ jest także podzielna przez 3.

5. Sfera \mathcal{S} jest styczna do wszystkich krawędzi sześcianu \mathcal{C} . Która liczba jest większa: pole powierzchni sfery \mathcal{S} , czy pole powierzchni sześcianu \mathcal{C} ? Odpowiedź uzasadnij.